JGP - Vol. 2, n. 3, 1985

Structures symplectiques, structures complexes, spineurs symplectiques et transformation de Fourier

A. CRUMEYROLLE
Université Paul Sabatier
118, Route de Narbonne
31062 Toulouse, Cedex
France

Abstract. *Planck's constant is very useful in the development of the theory of symplectic Clifford algebras introduced by the author in 1977* [1,a], *and to solve many connected problems for example the Poisson Lie algebra deformations* [1,c]. *In this paper we give a precise link between a complex structure J and the Fourier transform which is nothing but the natural left action of the covering $\tilde{J}$ of J in a symplectic convenient spinor space (modulo a constant factor).*
Thus Fourier transform becomes a geometric transformation separated from integration technics, good peculiarity for global problems. We explain nice algebraic properties of the Fourier transform taking them in the symplectic context with adapted metric in any signature. Some applications are given: Hermite's functions, Plancherel-Parseval's theorem, covariance problemes . . . . Our approach is particularly convenient for explain results in Maslov's theory [1,b] *and the difficulties in defining a global Fourier transform over a symplectic manifold.*

AVANT-PROPOS

Une foule de problème relevant aussi bien de la géométrie différentielle que de la physique mathématique concernent la notion d'algèbres de Clifford (orthogo-

---

Key-Words: *Symplectique-Algèbres de Clifford symplectiques - Spineurs symplectiques - Croupes de Clifford et groupes spinoriels symplectiques - Structure complexe - Transformation de Fourier - Constante de Planck - Lagrangiens - Laplaciens - Polynômes harmoniques - Fonctions d'Hermite.*
1980 Mathematics Subject Classification: *58 G. 15, 58 F 06, 53 C 80, 16 XX, 15 A 66, 81 XX, 42 XX, 43 XX.*

nale) et de spineurs, ceux-ci étant considérés comme des éléments d'espaces de représentations irréductibles de celles-là. Certains éléments inversibles des algèbres de Clifford permettent selon un processus classique de construire les revêtements des groupes orthogonaux, cela en toute dimension et signature. On sait que les algèbres de Clifford associées à des espaces de dimension finie sont toujours des algèbres semi-simples, possédant des propriétés intéressantes de périodicité qui en font un outil de grand intérêt pout l'étude de certaines fibrations. Les physisiens se sont surtout attachés à l'utilisation des algèbres de Clifford sous la forme matricielle de leur représentation, et malheureusement une avalanche de calculs et d'algorithmes en a alors quelque peu masqué la signification. C'est Dirac, linéarisant l'opérateur de Klein-Gordon, qui une quinzaine d'années aprés E. Cartan redécouvrit les spineurs sur un cas particulier. L'espace vectoriel engendré formellement par les combinaisons à coefficients réels de quatre «matrices de Dirac» γ_α, peut être à la fois identifié à un espace de Minkowski sur lequel opère le groupe de Lorentz ou à un espace de «spineurs» sur lequel opère le groupe de Clifford, les opérations étant reliées par les fameuses relations:

$$\Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1} = A_\alpha^\beta \gamma_\beta .$$

La notion de structure spinorielle au-dessus d'une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne n'est autre qu'un cas particulier d'une construction qui en mathématique fut envisagée systématiquement par Ehresmann (Colloque de Topologie de Bruxelles 1950, p. 51), et qu'il appela «extension» du groupe structural d'une espace fibré. L'existence d'un obstacle à cette extension a été signalée et explicitée pour le première fois dans le cas qui nous intéresse par A. Haefliger dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (séance du 6 août 1956): c'est un problème de topologie algébrique qui ne concerne que la groupe Spin (n) en tant que revêtement universel de $SO(n)$. C'est Lichnerowicz, que dans son article «Champs spinoriels et propagateurs» publié par la S.M.F. dans son bulletin 92, de 1964, utilisa rigoureusement et systématiquement pour la première fois cette notion de structure spinorielle dans l'étude, entre autres, des équations de Dirac. Autour des années 1970 nous avons alors cherché à introduire un lien concret entre cette définition cohomologique des structures spinorielles et l'aspect algébrique décrit dans le livre de Chevalley (1954); on sait que l'on peut associer à un fibré principal un fibré vectoriel par l'action effective du groupe structural sur un espace vectoriel, et qu'il revient alors au même, pour bien des problèmes, de considérer le fibré associé au lieu du fibré principal. C'est cette idée qui nous incita en 1969 à définir des fibrés en spineurs dont les fibres types ne sont autres que certains idéaux à gauche minimaux dans une algèbre de Clifford, c'est-à-dire des espaces de représentations irréductibles pour cette algèbre.

Cette méthode présente l'avantage d'être concrète et intuitive, fournissant un cadre naturel pour la mise en équations de problèmes mathématiques liés à la physique (équations de Dirac, de Maxwell, quantification au sens de Fock par exemple). Elle permet d'éliminer le lourd formalisme matriciel, de s'affranchir des particularités liées à la dimension et à la signature, de replacer dans leur contexte naturel, celui des spineurs, certaines notions que semblaient marginales ou étrangères comme celle de «twisteurs».

Elle suggère alors de s'intéresser dans le même esprit au cas symplectique.

La définition des algèbres, dites de Weyl, consiste à remplacer dans la définition des algèbres de Clifford, la forme quadratique g par une forme symplectique F. Selon Kirillov (Elements de la théorie des représentations, Ed. Mir, Moscou), considérons l'algèbre engendrée par les générateurs

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

et les relations:

$$p_i p_j = p_j p_i, \quad q_i q_j = q_j q_i, \quad p_i q_j - q_j p_i = \delta_{ij};$$

chaque élément de cette algèbre s'écrit sous forme d'un polynôme (non commutatif) des variables p_i et q_j, cette notation n'est pas unique, de sorte que l'écriture de ces polynômes résulte d'une convention, qui identifie linéairement cette algèbre à une algèbre de polynômes.

Il est connu, particulièrement en mécanique quantique, que les correspondances:

$$p_j \to \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad q_j \to i\lambda x_j, \quad 1 \to i\lambda,$$

permettent de décrire ces algèbres de Weyl en termes d'opérateurs différentiels à coefficients constants, ces correspondances sont liées au choix de ce que nous appelons dans $\mathbb{R}^{2n}$ une base ordonnée symplectique mais elles ont le même aspect pour toutes ces bases.

Les travaux de A. Weil, de Shale, et autres auteurs ont mis en évidence le rôle de groupes «métaplectiques» et des revêtements du groupe symplectique. Il existe alors une démarche formelle analogue à celle qui conduit aux structures spinorielles orthogonales, et on pourra parler, si possible, de structure spinorielle symplectique au-dessus d'une variété de même nom. La notion de spineur symplectique est alors évidente et claire, mais la difficulté liée à la dimension infinie des algèbres de Weyl, la correspondence avec les opérateurs différentiels décrite ci-dessus, ont conduit historiquement à aborder le problème de définition des spineurs symplectiques par la voie de l'analyse fonctionnelle (théorème de Shale-

-Weil sur la représentation de l'oscillateur harmonique, spineurs symplectiques de Kostant et autres auteurs, etc. . . .). Dans ce contexte, où interviennent les équations aux dérivées partielles et la transformation de Fourier, un obstacle nouveau, connu sous le nom «d'indice de Maslov», a été reconnu et explicité: il consiste essentiellement en une systématique des conditions d'existence globale de cette transformation.

Dans les années 1975 [1,a, b], nous avons mis au point un procédé géométrique des construction des groupes de Clifford et des groupes spinoriels symplectiques, cela ne peut se faire qu'au prix d'un élargissement de la notion d'algèbres de Weyl, et pose des difficultés nouvelles; il semble que l'utilisation systématique d'une indéterminée, que l'on pourra appeler «constante de Planck», soit la clef qui permet d'ouvrir la plupart des portes. La notion de spineur symplectique est alors formellement analogue à celle de spineur orthogonal et si l'on passe sur certaines technicités dont le mise au point n'est plus qu'une question de temps et de patience, on récupère dans son ensemble une situation tout à fait analogue au cas orthogonal.

Notons l'importance de la définition des transvections symplectiques au moyen d'exponentielles formelles selon la formule:

$$\exp (ta^2)x \exp (-ta^2) = x + 2h\, tF(a, x)a,$$

rappelée dans le II ci-dessous, et que nous utilisâmes pour la première fois dans [1,a]: ce résultat est crucial.

Nous avons montré particulièrement dans [1,b], comment l'indice de Maslov et l'indice trilatère de Leray étaient liés à cette géométrie cliffordienne symplectique, et de manière formelle que l'obstacle de Maslov reflétait l'impossibilité de définir globalement une transformation de Fourier au-dessus des variétés symplectiques, sauf condition de nature topologique - l'indice de Maslov représentant le «coup de pouce» que l'on doit donner pour rétablir une certaine cohérence dans les calculs locaux.

Le problème des déformations de l'algèbre de Poisson et de l'algèbre associative de fonctions définies au-dessus d'une variété symplectique trouve aussi une solution dans ce cadre comme nous l'avons montré dans [1,c d].

Comparant nos résultats à ceux qui viennent de l'analyse fonctionnelle, nous avons recherché dans cet article un lien entre une structure complexe J adaptée à une certaine pseudométrique (ou métrique) et la transformation de Fourier qui s'identifie, modulo un facteur constant, au relèvement $\tilde{J}$ de J dans un groupe spinoriel symplectique. A partir de là, la voie est ouverte pour la géométrisation, moyennant quelques conditions aisément réalisées dans les cas usuels: *la transformation de Fourier géométrique est l'action naturelle de $\tilde{J}$ sur les spineurs symplectiques*.

Dès lors les «belles propriétés» géométriques de la transformation de Fourier s'expliquent aisément ainsi que les connexions de celle-ci avec le groupe et l'algèbre de Heisenberg comme l'avaient signalé déjà bien des auteurs et particulièrement R. Howe [3]. Nous donnons quelques exemples de calculs dans cette approche (laplacien, fonctions d'Hermite, formule de Hecke, problèmes de covariance). Cependant c'est dans le cadre de la quantification géométrique, de l'étude des déformations des algèbres de Poisson que cette méthode paraît riche de développements.

Nous avons fait porter notre effort essentiellement sur l'aspect algébrique et géométrique au détriment de l'étude des problèmes qui relèvent plutôt de l'analyse et que nous laissons bien volontiers au spécialiste; en ce qui concerne les liaisons évidentes avec les espace fonctionnels, la théorie des distributions, les opérateurs différentiels, nous ne donnons que des indications - bien des passages pourraient donner naissance à d'importants développements plus ou moins autonomes par le lecteur intéressé.

La lecture de cet article pourrait être précédée de celle de [1,d] signalée en référence.

I. Soit E un espace vectoriel réel de dimension $2r$, muni d'une forme symplectique F. J, endomorphisme de E, tel que $J^2 = -1$ est une structure complexe.

DÉFINITION 1. *J est adaptée à F en signature (p,q), $p+q=r$, s'il existe une forme hermitienne non dégénérée $\eta : E \times E \to \mathbb{C}$, de signature (p,q) telle que $F = -\mathrm{Im}(\eta)$.* ∎

Ecrivant: $\eta(x,y) = \mathscr{R}(\eta(x,y)) + i\,\mathrm{Im}(\eta(x,y))$, on voit que: $(x,y) \to$ $\to -\mathrm{Im}(\eta(x,y))$ définit sur E une forme symplectique, tandis que:

$$(x,y) \to \mathscr{R}(\eta(x,y))$$

définit sur E une forme quadratique de signature $(2p, 2q)$.

Observons que

$$\mathscr{R}(\eta(ix,y)) = -\mathrm{Im}(\eta(x,y)) = F(x,y)$$

$$\mathscr{R}(\eta(x,y)) = -F(Jx,y)$$

$$\eta(x,y) = -F(Jx,y) - iF(x,y),$$

on pourra écrire plus simplement:

$$\mathscr{R}(\eta(x,y)) = (x,y);$$

on retiendra que:

(1) $$(Jx, y) = F(x, y),\ (Jx, Jy) = (x, y),\ F(Jx, Jy) = F(x, y),$$

et que J est orthogonal et symplectique. ■

On rappelle que l'on nomme lagrangien un sous-espace de E totalement isotrope maximum au sens symplectique (donc nécessairement de dimension réelle r).

PROPOSITION 1. *Soit L un lagrangien, non isotrope pour le pseudométrique $(\ ,\ )$; si J est adaptée à F, $J(L)$ est un lagrangien supplémentaire de L et orthogonal à L.* ■

En effet si $x \in L$ et si $y = J(x')$, $x' \in L$, $(Jx', x) = F(x', x) = 0$ puisque L est lagrangien. Comme L est non isotrope pour $(\ ,\ )$ et JL orthogonal à L, ces deux espaces sont supplémentaires. ■

PROPOSITION 2. *Soit $E = L \oplus L'$, L et L' étant des lagrangiens et g un produit scalaire de signature (p, q) sur L; il existe sur E une structure complexe J unique, adaptée à F en signature (p, q) telle que $J(L) = L'$ et que la restriction à L de la forme hermitienne de partie imaginaire $(-F)$ soit g.* ■

En effet si J existe, on transporte, g à L' par J qui est une isométrie et de sorte que L' soit orthogonal à L; nécessairement $F(x, y) = g(Jx, y)$, $\forall x \in E$, $\forall y \in E$; donc on déterminera $J(x)$ par $F(x, y) = g(Jx, y)$, on aura $J^2 = -1$ et on prendra $\eta(x, y) = g(x, y) - iF(x, y)$ de sorte que J est adaptée à F en signature (p, q).

Pratiquement on pourra procéder ainsi: on envisage une base symplectique $(e_\alpha, e_{\beta*})$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$, adaptée à la décomposition $E = L \oplus L'$ telle que

$$F(e_\alpha, e_{\beta*}) = \delta_{\alpha\beta},\ F(e_\alpha, e_\beta) = F(e_{\alpha*}, e_{\beta*}) = 0$$

$$g(e_\alpha, e_\alpha) = 1, \alpha = 1, \ldots, p, g(e_\alpha, e_\alpha) = -1, \alpha = p+1, \ldots, p+q$$

et $g(e_\alpha, e_{\beta*}) = 0$.

$$F(Je_\alpha, e_{\beta*}) = -g(e_\alpha, e_{\beta*}) = 0, \text{ donc } J(e_\alpha) \in L'.$$

$$F(Je_\alpha, e_\alpha) = -g(e_\alpha, e_\alpha) = \pm 1, \text{ donc}$$

$$J(e_\alpha) = e_{\alpha*},\ J(e_{\alpha*}) = -e_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, p$$

$$J(e_\alpha) = -e_{\alpha*},\ J(e_{\alpha*}) = e_\alpha,\ \alpha = p+1, \ldots, p+q.$$ ■

On saura donc construire d'après la proposition 2 un espace E symplectique, muni de J adapté à F en signature (p, q); L donné, le choix de L' détermine J de manière unique. La proposition 1 montre que si L est un lagrangien quelconque non isotrope pour $(\ ,\ )$ on pourra choisir dans L une base orthogonale $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ et la compléter par des éléments $(e_{1*}, e_{2*}, \ldots, e_{r*})$ formant avec les r premiers vecteurs une base symplectique adaptée à la décomposition $E = L \oplus \oplus J(L)$.

Nous remarquons que $U(p, q)$ est l'ensemble des éléments de $Sp(2r, \mathbb{R})$ qui commutent avec J, c'est aussi l'ensemble des éléments de déterminant 1 de $O(2p, 2q)$ qui commutent avec J car:

$$F(u(x),\ uJ(y)) = F(x, Jy),\ \ \forall x \in E,\ \ \forall y \in E$$

traduit que $u \in Sp(2r, \mathbb{R})$, et

$$F(u(x),\ J(u(y))) = F(x, Jy),\ \ \forall x \in E,$$

traduit que $u \in O(2p, 2q)$.

χ_α désignant un nombre réel, égal à 1 pour $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ et à (-1) pour $\alpha = (p+1), \ldots, (p+q)$, il sera commode de poser:

$$\epsilon_\alpha = \frac{e_\alpha - i\chi_\alpha e_{\alpha *}}{\sqrt{2}}\,, \qquad \epsilon_{\alpha *} = \frac{e_\alpha + i\chi_\alpha e_{\alpha *}}{\sqrt{2}}\,.$$

Nous notons aussi que:

$$(\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta) = (\epsilon_{\alpha *}, \epsilon_{\beta *}) = 0, \qquad (\epsilon_\alpha, \epsilon_{\beta *}) = \delta_{\alpha\beta},$$

$$F(\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta) = F(\epsilon_{\alpha *}, \epsilon_{\beta *}) = 0, F(\epsilon_\alpha, \epsilon_{\beta *}) = 0, \text{ si } \alpha \neq \beta, F(\epsilon_\alpha, \epsilon_{\alpha *}) = i\chi_\alpha\,.$$

$$J(\epsilon_\alpha) = i\epsilon_\alpha,\ \ J(\epsilon_{\alpha *}) = -i\epsilon_{\alpha *}\,,\ \ \eta(\epsilon_{\alpha *}, \epsilon_{\alpha *}) = \chi_\alpha$$

$$J(e_\alpha) = \chi_\alpha e_{\alpha *}\,,\quad J(e_{\alpha *}) = -\chi_\alpha e_\alpha\,.$$

II. Selon nos articles et travaux antérieurs, nous introduisons diverses algèbres de Clifford symplectiques. h étant une indéterminée (mais que nous pourrons interpréter éventuellement à un facteur constant prés, comme la constante de Planck des physiciens), nous prenons le quotient de l'algèbre tensorielle du module

$$E' = E \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mathbb{K}\,[[h]], \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),$$

par l'idéal bilatère engendré par les éléments

$$x \otimes y - y \otimes x - hF(x, y), \quad x, y \in E.$$

Cela nous donne d'abord l'algèbre associative $C_S(hF)$ (dite aussi algèbre de Weyl) à partir de laquelle nous construisons divers «élargissements»:

$\check{C}_S(hF)$, dont l'élément général est une série formelle selon les puissances des e_α, $e_{\beta*}$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$, à coefficients dans $\mathbb{K}\,[[h]]$, que nous pourrons appeler algèbre de Clifford symplectique formelle (on utilisera aussi $\mathbb{K}((h))$, corps des fractions rationnelles).

$C_S(hF)^\alpha$, pour laquelle $\underline{h}$ est fixé, mais dont le terme général peut s'écrire:

$$\hat{u} = M(H, K^*)\ \frac{e^H e^{K^*}}{(H!\,K^*!)^{1/2+\alpha}}$$

α est un nombre réel supérieur à 0, $\alpha > 0$.

H, K^* sont des indices composés, par exemple

$$e^H = (e_1)^{h_1}(e_2)^{h_2} \ldots (e_r)^{h_r}, \quad |H| = \Sigma h_i, H! = h_1!\,h_2! \ldots h_r!$$

(h_i entier supérieur ou égal à 0) et à partir d'un certain rang:

$$|M(H, K^*)| \leqslant \sigma(\hat{u})\rho(\hat{u})^{|H|+|K^*|}, \sigma(\hat{u}), \rho(\hat{u}) \text{ constantes positives.}$$

$\check{C}_S(hF)_T$, algèbre tronquée, quotient de $\check{C}_S(hF)$ par l'idéal des multiples de h^N, N entier positif fixé $N > 1$, dont les éléments ont des coefficients qui sont des polynômes en $\underline{h}$ de degré $(N-1)$ au plus.

Lorsque $\underline{h}$ est fixé les algèbres tronquées donnent à leur tour des algèbres dont les éléments sont des séries à coefficents dans $\mathbb{K}$; remarquant que $\underline{h}$ peut être considéré comme «trés petit», on rejoint alors un point de vue qui est celui de l'analyse non standard.

Si $a \in E$, $t \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$:

$$\exp(ta^2)x \exp(-ta^2) = x + 2ht\,F(a, x)a$$

où $\exp(ta^2)$ peut être considérée comme élément de

$$\check{C}_S(hF) \text{ ou de } \check{C}_S(hF)_T \text{ ou de } C_S(hF)^\alpha_T.$$

Nous avons introduit antérieurement des spineurs symplectiques comme limite projective d'une suite d'idéaux à gauche, mais seulement dans certains cas

Les espaces de spineurs symplectiques sont construits à partir d'une base symplectique $(e_\alpha, e_{\beta*})$ et ils peuvent linéairement s'identifier à une algèbre symétrique construite sur l'espace des e_α, $\alpha = 1, \ldots, r$, avec des acceptions différentes selon l'algèbre de Clifford considérée.

Il peut être plus avantageux dans ce qui suit de considérer un espace de spineurs symplectiques comme le quotient de l'algèbre de Clifford symplectique par l'idéal à gauche engendré par les $(e_{\alpha*})$, la representation s'obtenant elle-même à l'aide au produit à gauche suivi de ce quotient.

Avec cette convention le produit par $e_{\alpha*}$ pourra s'identifier à $\left(-h\,\dfrac{\partial}{\partial q^\alpha}\right)$ et

e_α à q^α quand on remplacera $(e_\alpha)^k$ par $(q^\alpha)^k$, q^α etant une variable coordonnée, comme cela résulte de:

$$(e_{\alpha *})(e_\alpha)^k = (e_\alpha)^k(e_{\alpha *}) - hk(e_\alpha)^{k-1}.$$

Cette convention conduit à interpréter l'algèbre de Clifford $C_S(hF)$ comme «l'algèbre de Weyl» d' opérateurs différentiels à coefficients constants pour un espace $\mathbb{R}^r \oplus (\mathbb{R}^r)^*$, les spineurs symplectiques devenant des séries dans l'algèbre symplectique de $\mathbb{R}^r$.

Les conditions qui définissent $C_S(hF)^\alpha$ sont alors des conditions qui entraînent l'analyticité et pour $\alpha > 1/2$ on a des développements de fonctions dont les dérivées sont à décroissance rapide. On observera que ces ensembles de fonctions sont aussi des algèbres particulières.

III. Dans le III, nous prenons d'abord $\underline{h} = 1$, si p est la projection de tout groupe ou sous-groupe de Clifford symplectique sur le groupe symplectique, nous avons montré que:

$$p \circ \exp\left(-\frac{\pi}{2} \sum_\alpha (\chi_\alpha \epsilon_\alpha \epsilon_{\alpha *})\right) = J \tag{2}$$

comme on le vérifie aisément à l'aide du développement de l'exponentielle (le rôle de h est joué par π, dans l'exponentielle).

De manière plus générale $U(p,q)$ est dans l'ensemble des produits des images par p des éléments du groupe métaplectique $Mp(r)$ de la forme:

$$\exp \lambda \exp (a^{\alpha\beta *} \epsilon_\alpha \epsilon_{\beta *})$$

$\lambda \in \mathbb{C}$, $a^{\alpha\beta *} \in \mathbb{C}$ (sans sommation).

L'algèbre de Lie de $U(p,q)$ est définie par des éléments $\sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta *} \epsilon_\alpha \epsilon_{\beta *}$, $U(p,q)$ opère sur l'espace des $(\epsilon_{\alpha *})$ et comme:

$$\sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta *}(\epsilon_\alpha \epsilon_{\beta *})\epsilon_{\gamma *} - \epsilon_{\gamma *} \sum_{\alpha,\beta} (a^{\alpha\beta} \epsilon_\alpha \epsilon_{\beta *}) = i\chi_\gamma \sum_\alpha a^{\gamma\alpha *} \epsilon_{\alpha *} ,$$

en écrivant que la matrice des $i\chi_\gamma \Sigma a^{\gamma\alpha *} \epsilon_{\alpha *}$ est antihermitienne pour η il vient:

$$\bar{a}^{\alpha\beta *} = a^{\beta\alpha *}.$$

Nous nous intéressons à l'algèbre de Lie de $0(p,q)$ dont les éléments sont cacactérisés par des $a^{\alpha\beta *} = -a^{\beta\alpha *}$. Ecrivant alors:

$$a^{\alpha\beta^*}\epsilon_\alpha\epsilon_{\beta^*} = \frac{1}{2}\,a^{\alpha\beta^*}(\epsilon_\alpha\epsilon_{\beta^*} - \epsilon_\beta\epsilon_{\alpha^*}) =$$

$$= \frac{i}{2}\,a^{\alpha\beta^*}(\chi_\beta e_\alpha e_{\beta^*} - \chi_\alpha e_\beta e_{\alpha^*}).$$

Nous avons obtenu:

PROPOSITION 3. *L'algèbre de Lie de* $O(p,q)$ *est isomorphe à l'ensemble de combinaisons linéaires à coefficients imaginaires purs (resp. réels) des* $\epsilon_\alpha\epsilon_{\beta^*} - \epsilon_\beta\epsilon_{\alpha^*}$ *(resp. des* $\chi_\beta e_\alpha e_{\beta^*} - \chi_\alpha e_\beta e_{\alpha^*}$*).* ■

Un calcul immédiat dans l'algèbre de Clifford symplectique donne:

$$e_\alpha e_{\beta^*}\left(\sum_\gamma \chi_\gamma (e_\gamma)^2\right) - \left(\sum_\gamma \chi_\gamma (e_\gamma)^2\right) e_\alpha e_{\beta^*} = -2\chi_\beta e_\alpha e_\beta$$

d'où l'on déduit que $\sum_\gamma \chi_\gamma (e_\gamma)^2$ commute avec

$$\chi_\beta e_\alpha e_{\beta^*} - \chi_\alpha e_\beta e_{\alpha^*}\,;$$

il en est de même de $\sum_\gamma \chi_\gamma (e_{\gamma^*})^2$ et de $\sum_\gamma e_\gamma e_{\gamma^*}$. ■

Posant:

$$(3) \qquad U = \frac{1}{2}\sum_\gamma \chi_\gamma (e_\gamma)^2, \quad V = \frac{1}{2}\sum_\gamma \chi_\gamma (e_{\gamma^*})^2, \quad W = \frac{r - 2\sum_\gamma e_\gamma e_{\gamma^*}}{2}.$$

Un calcul facile montre que:

$$(4) \qquad [U, V] = -W, \quad [U, W] = -2U, \quad [V, W] = 2V.$$

Donc, reconnaissant l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$, nous pouvons énoncer:

PROPOSITION 4. *U, V, W définis par (3) sont les éléments d'une base de l'algèbre de Lie d'un groupe isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$ (ou $SO(2,1)$) inclus dans $Sp(2r, \mathbb{R})$ et les éléments de la composante connexe de $O(p,q)$ commutent avec ce sous--groupe.* ■

Ainsi $O(p,q)$ et $SL(2, \mathbb{R})$ constituent dans $Sp(2r, \mathbb{R})$ une paire de sous--groupes, l'un étant le centralisateur de l'autre, ce résultat est bien connu [3].

Dans un repère adapté à la décomposition en deux lagrangiens supplémentaires, U, V, W, s'écrivent à l'aide des composantes des tenseurs «métriques» et symplectiques g et F:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta, \quad V = : \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha^*\beta^*} e_{\alpha^*} e_{\beta^*},$$

$$W = \frac{r}{2} - \sum_{\alpha,\beta} F^{\alpha\beta^*} e_\alpha e_{\beta^*}.$$

On a posé $F^{\alpha\beta^*} = g^{\alpha\lambda} g^{\beta^*\mu^*} F_{\lambda\mu^*}$.

La proposition 4 se rattache à la propriété connue:

Tout espace symplectique (E, F) de dimension $2r$, muni d'une structure complexe J adaptée à F, en signature (p, q), $p + q = r$, peut s'identifier (non de manière unique) au produit tensoriel d'un espace symplectique de dimension 2 et d'un espace pseudo-euclidien de dimension r, muni d'une métrique de signature (p, q).

Les U, V, W correspondent à l'algèbre de Lie de $Sp(2, \mathbb{R}) \otimes \mathrm{Id}_r \simeq SL(2, \mathbb{R}) \otimes \otimes \mathrm{Id}_r$ et les éléments de $0(p, q)$ sont identifiés à $\mathrm{Id}_2 \otimes 0(p, q)$, on explique ainsi mieux, la relation de commutation exprimée dans la proposition 4.

Rappelant les correspondances en variables q^α, p_α, on est amené à associer:

$$(5) \qquad \begin{cases} U \text{ et } \dfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta \\[2ex] V \text{ et } \dfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} \dfrac{\partial^2}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \\[2ex] W \text{ et } \dfrac{r}{2} - q^\alpha \dfrac{\partial}{\partial q^\alpha} \end{cases}$$

en ce qui concerne les actions naturelles sur les spineurs symplectiques.

On reconnaît des termes, représentant:

la norme pseudo-euclidienne,
le laplacien,
le champ de Liouville.

Au niveau de l'algèbre de Lie du groupe métaplectique $Mp(r)$, J provient de $-\frac{\pi}{2} \sum_\alpha \chi_\alpha \epsilon_\alpha \epsilon_{\alpha^*}$ et de $-\frac{\pi}{4} \sum_\alpha \chi_\alpha((e_\alpha)^2 + (e_{\alpha^*})^2)$ au niveau de l'algèbre de Lie du groupe spinoriel $Sp_2(r)$.

Ainsi J provient par p de $\exp\left(-\frac{\pi}{2}(U+V)\right)$, nous avons obtenu:

PROPOSITION 5. *J se «relève» en l'opérateur:*

$$\tilde{J} = \exp\left(-\frac{\pi}{2}(U+V)\right) \tag{6}$$

et en termes d'opérateurs infinitésimaux sur les spineurs symplectiques correspond à:

$$-\frac{\pi}{4}\left(g_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta + g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\right) \tag{7}$$

c'est-à-dire à la somme, à un facteur près, du beltramien ρ^2 et du laplacien Δ. ■

IV. La transformation de Fourier et la structure complexe J

Pour mieux comparer nos résultats avec les résultats classiques et ceux de certains auteurs comme [3] utilisons pour définir notre algèbre de Clifford symplectique, une table telle que:

$$e_\alpha e_{\beta*} - e_{\beta*} e_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\delta_{\alpha\beta} \tag{8}$$

ce qui revient à remplacer $\underline{h}$ par $\frac{1}{2\pi i}$ dans (I) ci-dessus.

Sur le plan infinitésimal J provient de $-i\pi^2(U+V)$ ou en termes d'opérateurs différentiels sur les spineurs de:

$$\frac{-\pi i}{4}\left(2\pi\rho^2 - \frac{\Delta}{2\pi}\right)$$

W doit être changé en $\frac{i}{2\pi}\left(\sum_\gamma e_\gamma e_{\gamma*} - \frac{r}{2}\right)$ avec

$$[U, V] = -W, \quad [U, W] = \frac{U}{2\pi^2}, \quad [V, W] = \frac{-V}{2\pi^2} \tag{9}$$

Posons alors $\tilde{J}_1 = \exp\left[\frac{-\pi i}{4}\left(2\pi\rho^2 - \frac{\Delta}{2\pi}\right)\right]$, qui n'est autre que $\tilde{J}$ avec ces nouvelles conventions.

Remarque. Avec $\dfrac{h}{2\pi i}$ dans (8)

$$-i\pi^2(U+V) \text{ devient } \frac{-i\pi^2}{h}(U+V)$$

$$\text{et } -\frac{\pi i}{4}\left(2\pi\rho^2-\frac{\Delta}{2\pi}\right) : \frac{-\pi i}{4h}\left(2\pi\rho^2-\frac{h^2\Delta}{2\pi}\right)$$

et dans la table (9), apparaît $\dfrac{h^2}{2\pi^2}$ au lieu de $\dfrac{1}{2\pi^2}$. Un spineur symplectique étant associé à une fonction séquentielle f de q^α, posant, $\mathcal{F}^{p,q}$ désignant la transformation de Fourier:

$$\mathcal{F}^{p,q}(f)(y) = \int_{\mathbf{R}^{q+p}} f(x)\, e^{-2\pi i(x\cdot y)}\mathrm{d}x$$

il vient selon le résultat explicité dans [3]:

(10) $$\tilde{J}_1 = \exp\frac{-\pi i(p-q)}{4}\,\mathcal{F}^{p,q}$$

Supposant que la transformée de Fourier de f existe, ou ce qui reviendra au même, que le produit par $\tilde{J}_1$ a un sens (c'est le cas si $\alpha > 1/2$ avec l'algèbre $C_S(F)^\alpha$ et la transformée de f est dans $C_S(F)^\alpha$), nous pouvons énoncer:

PROPOSITION 6. *Modulo le facteur constant* $\exp\left(-\dfrac{\pi i}{4}(p-q)\right)$ *la transformation de Fourier* $\mathcal{F}^{p,q}$ *s'identifie au relèvement* $\tilde{J}_1$ *de la structure complexe* J *adaptée à la structure symplectique* F *en signature* (p,q) *dans le groupe spinoriel symplectique* $Sp_2(p+q)$, *opérant naturellement sur l'espace des spineurs symplectiques par produit à gauche.* ■

A titre de vérification si on considère $f(x) = e^{-\pi(x\cdot x)}$ correspondant à $\exp(-\pi\sum_\alpha(e_\alpha)^2)\Phi^* = \exp(-2\pi U)\Phi^*$ dans l'espace $C_S(F)\Phi^*$ des spineurs symplectiques, sa transformée de Fourier est:

$$\exp\left(\frac{\pi i(p-q)}{4}\right)\exp\left[-\frac{\pi i}{4}\left(2\pi\rho^2-\frac{\Delta}{2\pi}\right)\right]\exp(-2\pi U)\Phi^*,$$

développant $\exp\left[-\dfrac{\pi i}{4}\left(2\pi\rho^2-\dfrac{\Delta}{2\pi}\right)\right]$ et multipliant terme à terme on obtient bien $\exp(-2\pi U)\Phi^*$ (conforme au résultat connu).

La formule classique $\chi_\alpha \mathscr{F}\dfrac{\partial f}{\partial q^\alpha} = 2\pi i q^\alpha \mathscr{F}(f)$ n'est autre que $\chi_\alpha \widetilde{J}_1 e_{\alpha *} \widetilde{J}_1^{-1} =$ $= -e_\alpha$, qui elle-même n'est autre que:

$$J(e_{\alpha *}) = -\chi_\alpha e_\alpha, \text{ donnée plus haut.}$$

La propriété de commutation énoncée dans la proposition 4 entraîne qu'en ce qui concerne les fonctions que nous avons envisagées la transformation de Fourier commute avec l'action des éléments de la composante connexe de $0(p,q)$.

Maintenant nous utilisons la constante de Planck, remplaçons F par $\dfrac{h}{2\pi i}F$ pour écrire les formules analogues à (8). Selon la remarque ci-dessus nous devons remplacer $\widetilde{J}_1$ par

$$\widetilde{J}_h = \exp\left(-\frac{\pi i}{4h}\left(2\pi\rho^2 - \frac{h^2\Delta}{2\pi}\right)\right), h \text{ réel mais indéterminé.}$$

Posant $e_\alpha = \sqrt{h}\, e'_\alpha$, $e_{\alpha *} = \sqrt{h}\, e'_{\alpha *}$

$$q'^\alpha = \frac{q^\alpha}{\sqrt{h}}$$

$\widetilde{J}_h = \exp\left(-\dfrac{\pi i}{4}\left(2\pi\rho'^2 - \dfrac{\Delta'}{2\pi}\right)\right)$ avec des notations évidentes, qui nous ramènent à la forme donnée par $\widetilde{J}_1$, la transformation de Fourier correspondante est donnée par

$$\int_{\mathbf{R}^{p+q}} f(x')\, e^{-2\pi i (x'\cdot y')} \mathrm{d}x'$$

f peut dépendre de h, cela donne pour $\mathscr{F}_h^{p,q}(f)(y)$:

$$\text{(11)} \qquad \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{\mathbf{R}^{p+q}} f\left(\frac{x}{\sqrt{h}}, h\right) e^{-\frac{2\pi i}{h}(x-y)} \mathrm{d}x$$

que l'on comparera à la formule donnée par J. Leray [4, page 20]; on a toujours:

$$\text{(12)} \qquad \widetilde{J}_h = \exp -\frac{\pi i(p-q)}{4} \mathscr{F}_h^{p,q},$$

$\widetilde{J}_h$ opérant par produit à gauche sur les spineurs symplectiques, qui sont ici des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}[[h]]$, définit une transformation de Fourier indexée par h.

On peut s'intéresser à des problèmes de convergence en utilisant une algèbre $C_S(hF)^\alpha$, ou tronquer en calculant mod h^N, ce sont de tels calculs qui apparaissent dans la méthode de la phase stationnaire de Maslov et qui sont des plus intéressants pous les applications à la physique.

Lorsque $\alpha > \frac{1}{2}$, selon la remarque de la fin du II, on voit utilisant un développement taylorien que notre définition de la transformation de Fourier sur les spineurs symplectiques coïncide complètement avec la définition classique dans l'ensemble des fonctions analytiques représentées par des séries appartenant à $C_S(hF)^\alpha$ (on remplace e_α par q^α).

Sur un plan différent on peut remplacer $\mathbb{R}^r \oplus (\mathbb{R}^r)^*$ par le fibré contangent à une variété réelle de dimension r munie d'une structure pseudo-riemannienne en signature (p, q), $p + q = r$, $M = T^*(V)$ à une structure symplectique canonique, si J est une structure complexe au sens de la définition 1, dont l'existence se montrerait comme dans la proposition 2 puisqu'il existe des champs globaux de lagrangiens supplémentaires sur $T^*(V)$, le groupe structural du fibré cotangent se réduisant à $U(p, q)$, et même à $O(p, q) \times 0(p, q)$, $g^{\alpha\beta^*} \epsilon_\alpha \epsilon_{\beta*}$ a une signification globale ainsi que

$$\tilde{J}_1 = \exp\,(-i\pi^2 g^{\alpha\beta^*} \epsilon_\alpha \epsilon_{\beta *}),$$

dans l'algèbre de Clifford symplectique de M.

Si l'on peut définir des champs de spineurs symplectiques liés à l'algèbre symétrique réelle de V (l'existence de champs de lagrangiens réels orientés en est une condition suffisante [1,b]), restreignant $T^*(V)$ à V, on pourra considérer une fonction $C^\infty(V)$ (localement $f(q^1, \ldots, q^r)$) et lui associer un faisceau $\varphi(f)$ d'algèbres symétriques élargies par le processus naturel suivant:

A chaque point $x \in V$ on construit une série formelle dans l'algèbre $\overset{**}{\vee}\, T_x^*(V)$ dont les termes sont les dérivéees covariantes symétrisées pour une connexion symplectique sans torsion [1, a]. Ce faisceau en algèbres symétriques est également un sous-faisceau en algèbres de Clifford symplectiques, donc un sous--faisceau en spineurs symplectiques. $\tilde{J}_1$ (ou $\tilde{J}_h$) est une section pour le faisceau en algèbres de Clifford symplectiques qui opère naturellement par produit à gauche sur $\varphi(f)$:

$$\varphi(f) \longrightarrow \quad \exp \frac{\pi i(p-q)}{4} \tilde{J}_1 \cdot \varphi(f)$$

est une transformation de Fourier globale formelle si on se borne aux algèbres $\check{C}_S((hF))$.

S'il existe sur M des structures spinorielles symplectiques non isomorphes on obtiendra différentes transformations de Fourier globales, l'ensemble de ces transformations de Fourier globales sera paramétré par $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ dont les éléments ne sont autres que des classes de Maslov, mod $\mathbb{Z}_2$ — [1,b].

Evidemment si nous remplaçons les $Sp_2(r)$ structures spinorielles symplectiques précédentes par des structures $Sp_q(r)$, ou métaplectiques, il apparaîtra un indice de Maslov à valeurs dans $\mathbb{Z}_q$, (ou même S^1). [1,b].

Ces difficultés liées à l'indice de Maslov apparaîtront dès que l'on voudra «recoller» des transformations de Fourier classiques qui sont diverses expressions locales de la transformation globale que nous venons de définir et dont l'existence est lié à celle d'une structure spinorielle symplectique sur $T^*(V)$ existence qui est réalisée si l'on peut définir des champs supplémentaires de lagrangiens réels orientés (réduction du groupe structural à $SO(p, q)$).

Résumant les résultats les plus importants, on a:

PROPOSITION 7. *Si l'on peut définir au-dessus d'une variété réelle V, de dimension r, admettant une structure pseudo-riemannienne en signature p, q, $(p + q = r)$ des champs de spineurs symplectiques construits pour le fibré cotangent $T^*(V)$ muni d'une structure complexe J adaptée à la métrique, il existe des transformations de Fourier globales généralisées formelles obtenues par produit à gauche* $\left(\textit{modulo}\ \exp\left(\dfrac{\pi i(p-q)}{4}\right)\right)$, *selon un relèvement $\tilde{J}_h$ de J dans le faisceau des spineurs symplectiques pour toute fonction $f \in C^\infty(V)$.* ∎

Notons que cette transformation cesse d'être formelle si le faisceau associé à f est par exemple dans l'algèbre $C_S(hF)_x^\alpha$ en chaque point x. On récupère alors complètement, sur le plan local, l'interprétation classique, si $\alpha > 1/2$ par exemple.

Remarques. 1. Si on appelle polynôme d'Hermite d'ordre n le polynôme $e^{2\pi x^2} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n} (e^{-2\pi x^2})$, où x est une variable réelle, ce polynôme apparaîtra naturellement à partir de

$$\exp(2\pi e_\alpha^2)(e_{\alpha *})^n \exp(-2\pi e_\alpha^2)$$

dans l'espace des spineurs symplectiques après utilisation du principe de correspondance.

Il en sera de même de

$$\exp(4\pi U)\, P(e_{\alpha *}) \exp(-4\pi U), (P(e_{\alpha *}) \text{ écrit pour } P(e_{1*}, e_{2*}, \ldots, e_{r*}))$$

qui est associé à

$$e^{2\pi(x\cdot x)}P\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q^{\alpha}}\right)e^{-2\pi(x\cdot x)} = \mathscr{P}(x), \quad x\in \mathbb{R}^r;$$

l'ensemble des $e^{-\pi(x\cdot x)}\mathscr{P}(x)$ est total dans $\mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^r)$ [2], il est construit des

$$\exp(-2\pi U)\exp(4\pi U)\tilde{J}P(e_{\alpha})\tilde{J}^{-1}\exp(-4\pi U) =$$

$$= \exp(2\pi U)\,P(e_{\alpha *})\exp(-4\pi U)$$

appliquant le principe de correspondance. Ainsi notre approche explique immédiatement ces résultats, on y reviendra plus bas. Cela permet de comprendre aussi pourquoi on a pu récupérer toutes les propriétés algébriques essentielles de la transformation de Fourier, en utilisant les spineurs symplectiques.

2. On pourrait envisager aussi de récupérer dans le cadre précédent certaines transformations intégrales qui possèdent une propriété d'inversion et satisfont un théorème de Parseval - Plancherel.

Nous remplacerons $\tilde{J}_h$ par un élément de l'algèbre de Clifford symplectique, et plus précisément par un élément γ qui appartient au groupe $Sp_2(r)$.

La commutation avec l'action du groupe $0(p, q)$ sera en général perdue, mais on conservera la propriété d'inversion et le théorème de Parseval - Plancherel, car si $\gamma \in Sp_2(r)$, $\beta(\overline{\gamma})\gamma = 1$. Cependant on n'obtiendra pas nécessairement une transformation intégrale (car il en est déjà ainsi avec des éléments qui appartiennent au revêtement de $SL(2, \mathbb{R})$ [6, p. 198].

Ce serait un intéressant problème que d'approfondir cette recherche.

3. L'action sur l'espace des spineurs de l'algèbre de Clifford symplectique correspond à celle d'un ensemble d'opérateurs différentiels. Les éléments de l'algèbre symétrique engendrée par les $(e_{\alpha *})$ correspondent à des opérateurs différentiels à coefficients constants.

Les opérateurs pseudo-différentiels A, tels qu'ils sont introduits par exemple dans Hörmander (Fourier integral operators I, Acta Math. 127 - 1971), pour une certaine classe de fonctions f sont tels que

$$A(f) = \mathscr{F}^{-1}\,a\,\mathscr{F}(f)$$

où $\mathscr{F}$ est la transformation de Fourier et a une fonction donnée.

Dans notre approche nous remplacerons f par un champ de spineurs symplectiques et a s'exprimera localement comme un polynôme en les éléments d'une section-repère $(e_{\alpha}, e_{\beta *})$ dont les coefficients pourront dépendre du point courant. Par exemple, dans l'espace euclidien plat si $a = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(e_{\alpha})^2$, A sera à un facteur constant près le laplacien usuel.

On peut considérer a dépendant des (e_{α}) et aussi des $(e_{\beta *})$, par exemple le «champ de Liouville».

$W = \frac{r}{2} - \sum_{\alpha} e_{\alpha} e_{\alpha *}$ et calculer:

$$\exp\,(i\,\pi^2(U+V))\,W\exp\,(-i\,\pi^2(U+V))\,f$$

de sorte que A est $\exp \operatorname{Ad}(i\pi^2(U+V))W$ opérant à gauche sur les spineurs symplectiques.

L'étude des opérateurs pseudo-différentiels a son correspondant dans l'etude de l'action à gauche des champs cliffordiens symplectiques sur les champs spinoriels.

On sera amené à envisager (dans le problème de l'inversion des opérateurs) des fractions rationnelles en les (e_α) seuls, ou même des «fonctions» de ces (e_α), ce qui nous conduira à poser:

$$e_{\alpha *} * \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_r) = \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_r) * e_{\alpha *} + h\,\frac{\partial \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_r)}{\partial e_\alpha}$$

ainsi:

$$e_{\alpha *} * \frac{1}{e_\alpha} = \frac{1}{e_\alpha} * e_{\alpha *} - \frac{h}{(e_\alpha)^2}$$

$$e_{\alpha *} * \frac{1}{e_\beta} = \frac{1}{e_\beta} * e_{\alpha *}\,,\ \beta \neq \alpha.$$

L'étude approfondie de ces problèmes est hors du cadre de cet article et sera présentée ailleurs, nous avons précisé dans l'introduction que cet article se propose seulement d'étudier le point de vue algébrique.

V. Bilinéarité et sesquilinéarité. Théorème de Parseval - Plancherel «spinoriel symplectique»

Considérons les spineurs symplectiques d'espace linéairement isomorphe à l'algèbre symétrique des e_α, $\alpha = 1, \ldots, r$. Ils correspondent à la représentation de Schrödinger. On peut envisager l'espace $\check{C}_S(hF)\Phi^*$ et aussi bien $C_S(hF)^\alpha\Phi^*$ selon que l'on s'intéresse au cas formel ou non.

β étant l'antiautomorphisme principal tel que $\beta|_{E_{\mathbb{C}}} = i_{\mathrm{Id}}$ nous écrivons symboliquement en doubles classes:

(13) $$\Phi\beta(u)v\Phi^* = \Phi B(u\Phi, v\Phi^*)\,\Phi^*$$

les $u\Phi$, $v\Phi^*$ étant à coefficients réels ou complexes. $B(u\Phi, v\Phi^*)$ est un scalaire

(1) puisque nous quotientons par les facteurs $(e_{\alpha *})$ à droite et les faceurs (e_α) à gauche. Le scalaire obtenu est dans $\mathbb{K}[[h]]$ ou dans $\mathbb{C}$ selon que l'algébre utilisée est formelle ou non.

Il est facile de voir que:

$$B(e^{H^*}\Phi, e^K\Phi^*) = 0 \text{ si } H \neq K$$

$$B(e^{H^*}\Phi, e^H\Phi^*) = (-ih)^H H!$$

Apparaît ainsi une dualité entre les espaces des ϕ-spineurs et celui des Φ^*-spineurs. On observera que les conditions de convergence pour $v\Phi^* \in C_S(hF)^\alpha\Phi^*$ peuvent être satisfaites pour des éléments tels que $u\Phi \notin C_S(hF)^\alpha\Phi^*$, par exemple pour $u\Phi = \exp t(e_{\gamma *})^2\Phi$, qui jouent en quelque sorte dans cette optique le rôle de «distributions» relativement aux premiers.

Il sera intéressant de définir une «forme» sesquilinéaire hermitienne définie positive; pour cela nous choisissons $h = \dfrac{1}{2\pi i}$, puisque nous voulons comparer à une transformation de Fourier, mais il sera alors plus avantageux de poser

$$E_\alpha = \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)e_\alpha, \qquad E_{\alpha *} = \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)e_{\alpha *},$$

les éléments $E_\alpha, E_{\alpha *}$ seront «réels» et satisfont à la table

$$E_\alpha E_{\beta *} - E_{\beta *}E_\alpha = \frac{1}{2\pi}\,\delta_{\alpha\beta}.$$

Il existe un isomorphisme évident entre les algèbres de Clifford symplectiques construites sur les (e_k) et les (E_k), de sorte que nous envisagerons la transformation de Fourier symplectique déterminée par le produit par $ex\left(\dfrac{\pi i(p-q)}{4}\right)\tilde{J}_1$ où $\tilde{J}_1$ est maintenant: $\exp\,[-\pi^2(\sum_\alpha (E_\alpha)^2 + \sum_\alpha (E_{\alpha *})^2)]$,

$$J(E_\alpha) = \chi_\alpha E_{\alpha *}, \; J(E_{\alpha *}) = -\chi_\alpha E_\alpha,$$

J adapté à F en signature (p, q), $F(E_\alpha, E_{\beta *}) = \dfrac{\delta_{\alpha\beta}}{4\pi}$

$$F(E_\alpha, JE_\alpha) = \chi_\alpha/4\pi \; \ldots \text{etc.} \; \ldots .$$

Soit β l'antiautomorphisme principal déduit de

$$\beta(E_\alpha) = -iE_{\alpha *}, \quad \beta(E_{\alpha *}) = iE_\alpha,$$

(1) Il s'agit en fait d'une densité de poids 1 lorsque l'on se place sur une variété.

les spineurs symplectiques étant déterminés par les (E_α). Nous écrirons naturellement

$$\beta(u\Phi^*) = \Phi\beta(u)$$

$$\beta(\overline{u\Phi^*}) = \Phi\beta(\overline{u})$$

$(-)$ désignant la conjugaison complexe. Nous formons:

$$\Phi\beta(\overline{u})v\Phi^* = \Phi\,\mathscr{H}(u\Phi^*, v\Phi^*)\Phi^* \tag{14}$$

$\mathscr{H}(u\Phi^*, v\Phi^*)$ est un scalaire et il est facile de voir que:

$$\mathscr{H}(e^H\Phi^*, e^K\Phi^*) = 0, \text{ si } K \neq H$$

$$\mathscr{H}(e^H\Phi^*, e^H\Phi^*) = |h|^H H!$$

$\mathscr{H}$ est sesquilinéaire hermitienne définie positive. Elle est invariante par tous les éléments du groupe $Sp_2(r)$ et en particulier par $\tilde{J}_1$. (théorème de Parseval - Plancherel symplectique).

On notera bien que les éléments exponentiels $\exp ta^2$, $\exp tb^2$, peuvent donner pour B et pour $\mathscr{H}$, et pour certaines valeurs de t, une série divergente si $\underline{h}$ est considéré comme nombre complexe, on devra donc dans ce cas considérer des séries formelles où $\underline{h}$ est une indéterminée (imaginaire pure pour le cas précédent avec les (e_k), réelle avec les (E_k)).

Remarque importante

Nous aurions pu choisir pour espace de spineurs symplectiques ceux que l'on construit avec les $\hat{\epsilon}_\alpha$ (ou les $\hat{\epsilon}_{\alpha*}$) tels que:

$$\hat{\epsilon}_{\alpha*} = \frac{e_\alpha + ie_{\alpha*}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{\epsilon}_\alpha = \frac{e_\alpha - ie_{\alpha*}}{\sqrt{2}},$$

on vérifie, si $h = 1$, que:

$$(\hat{\epsilon}_\alpha, \hat{\epsilon}_\beta) = (\hat{\epsilon}_{\alpha*}, \hat{\epsilon}_{\beta*}) = 0, \quad J(\hat{\epsilon}_\alpha) = i\chi_\alpha\hat{\epsilon}_\alpha, \quad J(\hat{\epsilon}_{\alpha*}) = -i\chi_\alpha\hat{\epsilon}_{\alpha*}$$

$$(\epsilon_\alpha, \epsilon_{\alpha*}) = \chi_\alpha, \quad (\hat{\epsilon}_\alpha, \hat{\epsilon}_{\beta*}) = 0, \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta$$

$$F(\hat{\epsilon}_\alpha, \hat{\epsilon}_\beta) = F(\hat{\epsilon}_{\alpha*}, \hat{\epsilon}_{\beta*}) = 0, \quad F(\hat{\epsilon}_\alpha, \hat{\epsilon}_{\beta*}) = i\delta_{\alpha\beta}.$$

Posant ensuite:

$$X = \sum_\alpha \frac{(\hat{\epsilon}_\alpha)^2}{2}, \quad Y = \sum_\alpha \frac{1}{2}(\hat{\epsilon}_{\alpha*})^2, \quad Z = \frac{i}{2}\left(\sum_\alpha 2\hat{\epsilon}_\alpha\hat{\epsilon}_{\alpha*} - ir\right) \tag{15}$$

il vient:

(16) $$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = -2X, \quad [Y, Z] = 2Y$$

déterminant une algèbre de Lie isomorphe à celle de $SL(2, \mathbb{C})$, ou $SO(3, 1)$ (groupe de Lorentz). Nous observons que les X, Y, Z sont des combinaisons linéaires des $\sum_\alpha (e_\alpha)^2, \sum_\alpha (e_{\alpha^*})^2, \sum_\alpha (e_\alpha e_{\alpha^*})$.

Construisons un espace de spineurs sur l'algèbre symétrique des $(\hat{\epsilon}_\alpha)$ (ils correspondent à la représentation de Bargmann-Fock). Si nous voulons aisément comparer nos calculs à la transformation de Fourier classique, nous choisissons $h = -\dfrac{1}{2\pi}$, le principe de correspondance assigne à $\hat{\epsilon}_\alpha$, le produit par $\hat{q}^\alpha$ et à $(\hat{\epsilon}_{\alpha^*})$ la derivation $-\dfrac{1}{2\pi i} \dfrac{\partial}{\partial q^\alpha}$.

La transformation de Fourier correspond alors à un facteur constant près à l'action de $\exp\left[-\dfrac{i\pi}{4}\left(2\pi\rho^2 - \dfrac{\Delta}{4\pi}\right)\right]$ sur l'espace des polynômes en $\hat{q}^\alpha$, ou encore au produit à gauche par:

$$\hat{J}_1 = \exp\left[-\frac{\pi^2 i}{2}\left(\sum_\alpha \chi_\alpha(\hat{\epsilon}_\alpha)^2 + \sum \chi_\alpha(\hat{\epsilon}_{\alpha^*})^2\right)\right].$$

Avec l'antiautomorphisme β tel que $\beta|_{E_c} = i$ Id nous pouvons ancore construire une «forme-densité» sesquilinéaire hermitienne $\mathcal{H}$:

(17) $$\Phi\beta(\bar{u})v\Phi^* = \Phi\, \mathcal{H}(u\Phi^*, v\Phi^*)\, \Phi^*$$

(on a ici $\beta(\overline{u\Phi^*}) = \Phi\beta(\bar{u})$).

On vérifie aisément que

$$\mathcal{H}(\hat{\epsilon}^H \Phi^*, \hat{\epsilon}^K \Phi^*) = 0, \quad \text{si} \quad K \neq H,$$

$$\mathcal{H}(\hat{\epsilon}^H \Phi^*, \hat{\epsilon}^H \Phi^*) = |h|^H \cdot H!$$

Cependant si nous voulons avoir un théorème de Parseval-Plancherel nous devons remplacer $\hat{J}_1$ par $\tilde{J}_1$ ($\hat{J}_1$ est la transmuée de $\tilde{J}_1$ par $e_\alpha \to \hat{\epsilon}_\alpha$, $e_{\alpha^*} \to \hat{\epsilon}_{\alpha^*}$).

$\mathcal{H}$ est évidemment invariante par l'action du groupe spinoriel symplectique $Sp_2(r)$.

Finalement, nous voyons que du point de vue géométrique nous pourrions définir une transformation de Fourier spinorielle par le relèvement J de la structure complexe (modulo un isomorphisme de l'algèbre de Clifford symplectique qui restreint aux spineurs soit une isométrie pour les formes sesquilinéaires hermitiennes associées à leurs espaces, ces espaces pouvant être distincts). On sait que J commute avec les éléments du relèvement du groupe unitaire $U(p, q)$.

Remarque. Quand on considère deux espaces de spineurs symplectiques quelconques d'éléments génériques $u\Phi_1^*$ et $v\Phi^*$ (associés à des $\hat{\epsilon}_\alpha$, ou $\hat{\epsilon}_{\alpha *}$ construits comme les précédents à partir d'éléments réels analogues à e_α, $e_{\alpha *}$), on peut aisément définir une sesquilinéarité sur leur produit, il suffit de se ramener au cas précédent en tenant compte de l'action transitive du groupe symplectique sur l'ensemble des sous-espaces lagrangiens. L'ambiguité de définition de la transformation symplectique qui associe deux lagrangiens n'entraîne aucune difficulté sérieuse car les formes sesquilinéaires introduits se correspondent par l'action de $Sp_2(r)$. Dans la littérature on rencontre des calculs équivalents dans le processus connu sous le nom de «pairing» [5].

VI. Le laplacien et la géométrie symplectique

Faisons de nouveau $\underline{h} = 1$. Nous avons vu que $\Sigma \chi_\alpha (e_{\alpha *})^2$ correspond au laplacien Δ (généralisé en signature p, q) quant à son action sur les spineurs symplectiques interprétés comme polynômes en q^α, $\alpha = 1 \ldots r$.

Par exponentiation $\gamma = \exp (\Sigma \chi_\alpha (e_{\alpha *})^2 t)$ donne une transvection symplectique et

$$\gamma\, u\, \Phi^* = \gamma u \gamma^{-1} \gamma \Phi^* = \gamma u \gamma^{-1} \Phi^*$$

$$\Delta\, u\, \Phi^* = 0 \ \text{ équivaut à } \ \gamma\, u\, \Phi^* = u \Phi^*$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En effet: $\gamma\, u\, \Phi^* = u\Phi^*$ entraîne

$$\gamma\, u\, \gamma^{-1} \Phi^* = u \Phi^*,$$

d'où en dérivant à l'identité:

$$(\Sigma \chi_\alpha (e_{\alpha *})^2 u - u\, \Sigma \chi_\alpha (e_{\alpha *})^2) \Phi^* = 0$$

$$\Sigma \chi_\alpha (e_{\alpha *})^2 u \Phi^* = 0$$

Réciproquement: si $\quad \Sigma \chi_\alpha (e_{\alpha *})^2 u \Phi^* = 0$

$$\gamma\, u\, \Phi^* = C^{te}$$

mais pour $t = 0$, $\gamma(0) = 1$, d'où le résultat. Donc:

PROPOSITION 8. *Les spineurs symplectiques harmoniques $u\Phi^*$ sont les spineurs invariants par l'action naturelle du groupe à un paramètre:*

$$t \to \exp (\Sigma \chi_\alpha (e_{\alpha *})^2 t). \qquad \blacksquare$$

Remarque. Il est immédiat que si l'on considère tout opérateur differentiel du second ordre à coefficients constants (en les $\partial/\partial q^\alpha$):

$$\Sigma\, A^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}$$

la même propriété s'applique pour le groupe à un paramètre de transformations symplectiques:

$$t \to \exp\left[\left(\sum_{\alpha,\beta} A^{\alpha\beta} e_{\alpha *} e_{\beta *}\right) t\right].$$

Considérons la quotient de l'algèbre $\check{C}_S(hF)$ par l'idéal bilatère (S) endendré par l'élément $(\Sigma (e_{\alpha *})^2 - 1)$.

Tout polynôme homogène en les $(e_{\alpha *})$ peut s'écrire: $Q(e_{\alpha *}) = P_0(e_{\alpha *}) + (\Sigma (e_{\alpha *})^2)\, P(e_{\alpha *})$, réitérant:

$$P_0(e_{\alpha *}) + (\Sigma (e_{\alpha *})^2) P_1(e_{\alpha *}) + (\Sigma (e_{\alpha *})^2)^2 P_2(e_{\alpha *}) + \\ + (\Sigma (e_\alpha)^2)^3 P_3(e_{\alpha *}) + \ldots$$

où les P_0, P_1, P_2, P_3 ... ne sont pas divisibles par $\Sigma (e_{\alpha *})^2$ (signature elliptique). Appliquant $\gamma(1) = \exp \Sigma (e_{\alpha *})^2$ à $P_i(e_{\alpha *})$ par

$$\gamma(1)\, P_i(e_{\alpha *})\, \gamma(1)^{-1},$$

puis passant au quotient par S, on voit immédiatement que $P_i(e_{\alpha *}))$ est invariant par γ_1 car $Cl(\gamma_1)$, mod S, $= 1$.

On retrouve ainsi trés rapidement un résultat classique sur l'écriture des polynômes à l'aide de facteurs $P_i(q^\alpha)$ harmoniques et de $\Sigma (q^\alpha)^2$ [2]. En particulier si q^α est réel, (la restriction à la surface de la sphère unité S_{n-1} de tout polynôme de n variables est une somme de restrictions de polynômes harmoniques.

Les spineurs symplectiques obtenus dans l'algèbre quotient par l'idéal S sont des séries de Fourier à r variables (quand on remplace $e_{\alpha *}$ par q^α).

Evidemment cela est valable aussi bien pour les spineurs symplectiques construits à l'aide des $(\epsilon_\alpha, \epsilon_{\alpha *})$, le raisonnement étant le même.

La remarque ci-dessus nous permet de donner un sens à la notion de série de Fourier sur une quadrique.

Remarques. 1. On voit aussi que la norme obtenue à l'aise de $(\mathscr{H})$ n'est pas la norme usuelle de l'espace de Hilbert des fonctions $\mathscr{L}^2$, car $(e^H \Phi^*)$ ne constitue pas une base orthonormée dans cet espace.

2. Δ est auto-adjoint pour $\mathscr{H}$, cela résulte immédiatement de l'interprétation de Δ comme $\Sigma (e_{\alpha *})^2$ à un coefficient réel près.

3. Δ étant auto-adjoint pour $\mathscr{H}$ on en déduit par un raisonnement classique l'écriture de tout spineur symplectique $u\Phi^* = v\Phi^* + \Delta(w\Phi^*)$, où $v\Phi^*$ est harmonique. Revenant à l'interprétation de Δ on sait que tout polynôme en (e_α) s'écrit:

$$Q(e_\alpha) = P_0(e_\alpha) + (\Sigma(e_\alpha)^2)\, P(e_\alpha), \text{ où } P_0(e_\alpha)$$

est harmonique, on retrouve ainsi la propriété que nous venons d'établir utilisant l'idéal S.

Nous allons maintenant utiliser le principe de correspondance $e_\alpha \to q^\alpha$, $e_{\alpha*} = -\dfrac{\partial}{\partial q^\alpha}$ $(h = 1)$ pour étudier certains problèmes d'invariance ou de covariance du laplacien. Considérons les éléments (C):

$$\left\{\begin{array}{ll}
\chi_\alpha e_\alpha e_{\beta*} - \chi_\beta e_\beta e_{\alpha*} & \text{(rotations infinitésimales)} \\[2ex]
\sum\limits_{\alpha} e_\alpha e_{\alpha*} & \text{(homothéties infinitésimales)} \\[2ex]
e_{\alpha*} & \text{(translations infinitésimales)} \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha} \chi_\alpha (e_\alpha)^2 e_{\gamma*} - \chi_\gamma e_\gamma \sum\limits_{\alpha} (e_\alpha e_{\alpha*}) = \Phi_\gamma & \text{(accélérations)}
\end{array}\right.$$

qui correspondent respectivement aux éléments (C'):

$$\left\{\begin{array}{l}
-q^\alpha \chi_\alpha \dfrac{\partial}{\partial q^\beta} + q^\beta \chi_\beta \dfrac{\partial}{\partial q^\alpha} = q_\beta \dfrac{\partial}{\partial q^\alpha} - q_\alpha \dfrac{\partial}{\partial q^\beta} \\[2ex]
-q^\alpha \dfrac{\partial}{\partial q^\alpha} \\[2ex]
-\dfrac{\partial}{\partial q^\alpha} \\[2ex]
\sum\limits_{\alpha} q_\gamma q^\alpha \dfrac{\partial}{\partial q^\alpha} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta \dfrac{\partial}{\partial q^\gamma}\,.
\end{array}\right.$$

Il est facile de vérifier par un calcul direct que les éléments (C) constituent une algèbre de Lie dont (C') est une «représentation» en termes de champs de vecteurs de $\mathbb{R}^r$, muni de la métrique de signature (p, q).

On reconnaît l'algèbre de Lie du groupe conforme complet $C_{p,q}$.

Δ est «représenté» par $\Sigma \chi_\alpha (e_{\alpha *})^2$.

On a déjà remarqué que:

$$\Delta(\chi_\alpha e_\alpha e_{\beta *}) - (\chi_\beta e_\beta e_{\alpha *})\Delta = 0$$

$$\Delta e_{\alpha *} - e_{\alpha *}\Delta = 0$$

donc on a l'invariance du laplacien pour l'algèbre de Lie des isométies infinitésimales.

Puis $\Delta(\sum_\alpha e_\alpha e_{\alpha *}) = [\sum_\alpha e_\alpha e_{\alpha *} - 2]\,\Delta$ est une propriété de covariance de Δ pour les homothéties; enfin en ce qui concerne les «accélérations»

$$\Delta\,\Phi_\beta - \Phi_\beta \Delta = 2\chi_\beta e_\beta \Delta + (r-2)\,e_{\beta *}$$

ne donne une propriété de covariance que pour $r = 2$.

VII. Quelques autres applications

A titre d'exemple et pour montrer certains avantages de cette approche nous allons établir encore certains résultats qui sont présentés dans la littérature selon des méthodes tirées de l'analyse.

Prenons d'abord $h = 1/2\pi i$ (et les spineurs construits sur l'espace symétrique des (e_α), avec tous les $\chi_\alpha = 1$).

LEMME. *L'action naturelle de* $\exp(-\pi\,\Sigma(e_\alpha^2)t) = \exp(-2\pi U)t$ *envoie* $e_{\alpha *}$ *sur* $e_{\alpha *} - 2\pi h t \cdot e_\alpha = e_{\alpha *} + ite_\alpha$. ∎

Il suffit de calculer:

$$\exp(-\pi(\Sigma e_\alpha^2)t) \cdot e_{\alpha *} \cdot \exp(\pi\Sigma(e_\alpha^2)t).$$

Faisant $t = 1$: $e_{\alpha *}$ devient $e_{\alpha *} + ie_\alpha = \sqrt{2}\,\epsilon_{\alpha *}$. ∎

P étant un polynôme harmonique réel de degré k, homogène nous allons établir *la formule de Hecke*:

$$\mathscr{F}(P(x)e^{-(\pi x \cdot x)}) = (-i)^k P(x)\,e^{-\pi x \cdot x}.$$

Observons qu'en ordonnant selon des $e_{\alpha *}, e_\alpha$: $\exp(2\pi Ut)\,P(e_{\alpha *})\exp(-2\pi Ut) = P(e_{\alpha *})$ (on rappelle que $P(e_{\alpha *})$ signifie $P(e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{r*})$), modulo de termes en $(e_{\alpha *})^\lambda (e_\alpha)^\mu$, (il ne figure au second membre aucun terme en les $(e_{\alpha *})$ seuls de degré inférieur à k car P est harmonique (Prop. 8)).

D'autre part l'action de $\exp(2\pi Ut)$ s'étend à un automorphisme d'algèbre et donc $\exp(2\pi Ut)\,P(e_{\alpha *})\exp(-2\pi Ut) = P(e_{\alpha *} - ite_\alpha)$,

$$P(e_{\alpha*}) \exp(-2\pi Ut) = \exp(-2\pi Ut)\,(P(e_{\alpha*}) + \\ + (-it)^k P(e_\alpha) + R(e_\alpha, e_{\beta*}))$$

où $R(e_\alpha, e_{\beta*}) = Q(e_\alpha)$, degré $Q < k$, modulo un multiple à gauche des $e_{\alpha*}$,

$$P(e_{\alpha*}) \exp(-2\pi U)\Phi^* = (-i)^k P(e_\alpha) \exp(-2\pi U)\Phi^* + \\ + Q(e_\alpha) \exp(-2\pi U)\Phi^*.$$

Mais $Q(e_\alpha)$ est identiquement nul, en effet: considérons l'antiautomorphisme de l'algèbre qui étend $e_\alpha \to e_{\alpha*}$, $e_{\alpha*} \to e_\alpha$

$$P(e_\alpha - ie_{\alpha*}) = (-i)^k P(ie_\alpha + e_{\alpha*}) = (-i)^k P(e_{\alpha*} - ie_\alpha)$$

puisque P est réel.

S'il figurait $Q(e_\alpha)$ venant de $P(e_{\alpha*} - ie_\alpha)$, il figurerait dans $P(e_\alpha - ie_{\alpha*})$, en vertu de l'échange entre e_α et $e_{\alpha*}$, un terme en les $(e_{\alpha*})$ seuls, de même degré que $Q(e_\alpha)$, on a vu que c'était impossible, ainsi:

$$P(e_{\alpha*}) \exp(-2\pi U)\Phi^* = (-i)^k P(e_\alpha) \exp(-2\pi U)\Phi^*$$

$$\tilde{J}_1 P(e_{\alpha*}) \tilde{J}_1^{-1} \tilde{J}_1 \exp(-2\pi U)\Phi^* = (-i)^k \tilde{J}_1 P(e_\alpha) \exp(-2\pi U)\Phi^*$$

$$\exp\left(\frac{-\pi i r}{4}\right) P(e_\alpha) \exp(-2\pi U)\Phi^* = (i)^k \tilde{J}_1 P(e_\alpha) \exp(-2\pi U)\Phi^*$$

$$P(e_\alpha) \exp(-2\pi U)\Phi \quad = (i)^k \mathscr{F}(P(e_\alpha) \exp(-2\pi U)\Phi^*)$$

ce qu'il fallait établir.

La transformée de Fourier des fonctions d'Hermite ($q = 0$)

Nous considérons les spineurs symplectiques de la forme:

$$\exp(2\pi U)\, P(e_{\alpha*}) \exp(-4\pi U)\Phi^*,$$

P homogène de degré k, comme

$$\exp(2\pi U)\, P(e_{\alpha*}) \exp(-2\pi U) = P(e_{\alpha*} - ie_\alpha)$$

$$= P(-i(e_\alpha + ie_{\alpha*}) = (-i\sqrt{2})^k P(\epsilon_{\alpha*}), \tag{18}$$

Multipliant par $\tilde{J}_1$:

$$(-i\sqrt{2})^k \tilde{J}_1 P(\epsilon_{\alpha*}) \exp(-2\pi U)\Phi^* = (-i\sqrt{2})^k \tilde{J}_1 P(\epsilon_{\alpha*}) \tilde{J}_1^{-1} \tilde{J}_1 \exp(-2\pi U)\Phi^*$$

$$= (-i\sqrt{2})^k (-i)^k P(\epsilon_{\alpha*}) \exp(-2\pi U)\Phi^*$$

$$= (-i)^k P(e_{\alpha*} - ie_\alpha) \exp(-2\pi U)\Phi^*$$

$$= (-i)^k P(e_{\alpha *} - ie_\alpha) \exp(2\pi U) \exp(-4\pi U)\Phi^*$$

$$= (-i)^k \exp 2\pi U\, P(e_{\alpha *}) \exp(-4\pi U)\Phi^*,$$

donc $\mathscr{F}(\exp(2\pi U)P(e_{\alpha *})\exp(-4\pi U)\Phi^*) = (-i)^k \exp(2\pi U)P(e_{\alpha *})\exp(-4\pi U)\Phi^*$, retrouvant, conformément au résultat classique: $\mathscr{F}(h_k) = (-1)^k h_k$, pour la $k^{\text{ième}}$ fonction d'Hermite h_k. On en déduit aisément, compte tenu de (18) et de l'expression de nos spineurs symplectiques que les seuls spineurs symplectiques invariants par la transformation de Fourier sont de la forme $\exp(2\pi U)Q(e_{\alpha *}) \times \times \exp(-4\pi U)\Phi^*$; où $Q(e_{\alpha *})$ est une série formelle (éventuellement convergente) dont tous les termes sont pairs. Ainsi l'ensemble des fonctions d'Hermite paires (k pair) «engendre» l'espace sur $\mathbb{C}$ des fonctions invariantes par la transformation de Fourier.

Evidemment si k est impair on a des fonctions qui se changent en leur opposée (décomposition spectrale de $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}^2 = \mathrm{Id}$).

Avec les notations utilisées dans les remarques du IV ci-dessus:

$$\mathscr{P}(x) = e^{2\pi x\cdot x} P\left(\frac{-1}{2\pi i}\ \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\right) e^{-2\pi x\cdot x}$$

$$x = (q^1, \ldots, q^r).$$

Posons selon J. Dieudonné [2]:

$$\omega P(x) = e^{-\pi(x\cdot x)}\mathscr{P}(x)$$

et avec nos notations:

$$\mathscr{K}(\exp(-2\pi U)\exp(4\pi U)P(e_{\alpha *})\exp(-4\pi U)\Phi^*,$$

$$\exp(-2\pi U)\exp(4\pi U)\,Q(e_{\alpha *})\exp(-4\pi U)\Phi^*)$$

$$= \mathscr{K}(P(e_{\alpha *})\exp(-4\pi U)\Phi^*,\ Q(e_{\alpha *})\exp(-4\pi U)\Phi^*),$$

selon les résultats du V, et prenant pour fixer les idées $q = 0$,

$$= \mathscr{K}(\tilde{J}_1 P(e_\alpha)\tilde{J}_1^{-1}\exp(-4\pi U)\Phi^*,\ \tilde{J}_1(Q(e_\alpha)\tilde{J}_1^{-1}\exp(-4\pi U)\Phi^*)$$

$$= \mathscr{K}(P(e_\alpha)\exp(-\pi U)\Phi^*,\ Q(e_\alpha)\exp(-\pi U)\Phi^*)$$

en remarquant que $\mathscr{F}(\exp(-4\pi U)\Phi^* = 2^{-r/2}\exp(-\pi U)\Phi^*$, on obtient

$$2^{-r}\mathscr{K}(P(e_\alpha)\Phi^*,\ Q(e_\alpha)\Phi^*).$$

Soit $\mathscr{K}(\omega P, \omega Q) = 2^{-r}\mathscr{K}(P, Q)$ [2, p. 116].

On pourrait donner encore bien d'autres exemples.

CONCLUSION:

Ayant mis en évidence le lien étroit entre transformation de Fourier et structure complexe adaptée à la structure symplectique en signature quelconque, on peut algébriser et géométriser certains développements et calculs usuellement présentés dans un contexte de pure analyse.

La transformation de Fourier ainsi définie qui opère sur les espaces de spineurs symplectiques peut sous certaines conditions (nullité de la seconde classe de Stiefel-Whitney de la variété symplectique, existence d'un couple de champ de lagrangiens supplémentaires) être globalement étendue au-dessus d'une variété munie d'un fibré en spineurs symplectiques.

L'ensemble de ces transformations de Fourier globales est alors paramétré par un indice (ou classe) de Maslov.

Il devient alors particulièrement commode d'aborder dans ce contexte l'étude des problèmes posés par les déformations d'algèbres de Poisson, la quantification géométrique et les opérateurs différentiels.

REFERENCES

[1] A. CRUMEYROLLE, a) *Algèbre de Clifford symplectique ... spineurs symplectiques*, J. Math. pures et appl. t. 56 - 1977, p. 205 - 230. b) *Classes de Maslov ...*, J. Math. p. et appl. t. 58 - 1979. c) *Deformations d'algèbres associées à une variété symplectique*, Ann. de l'I.H.P. Vol. 35 - n. 3 1981, p. 175 - 194. d) *Constante de Planck et géométrie symplectique*, (pour publication).

[2] J. DIEUDONNE, *Eléments d'analyse*. Tome 6, (Gauthier-Villars, Paris)..

[3] R. HOWE, *On the role of the Heisenberg group in harmonic analysis*, (Bull. of the Am. Math. Soc. Vol. 3 - n.2 Sept. 1980).

[4] J. LERAY, *The meaning of Maslov's asymptotic method: the need of Planck's constant in mathematics*, (Bull. of. Am. Math. Soc. July 1981 - Vol. 5 - n. 1).

[5] J. SNIATYCKI, *Geometric Qunatization and Quantum Mechanics*, (Springer-Verlag), 1980.

[6] M. VERGNE (et G. LION), *The Weil representation, Maslov index and theta series*, Progress in math. Birkhaüser, 1980.

Manuscript received: January 21, 1985